Exame final nacional de Matemática A **(2025, Época especial)**

Proposta de resolução

1. Calculando o limite de cada uma das sucessões, temos:

   - $\lim \dfrac{2-n^2}{n} = \lim \dfrac{\frac{2-n^2}{n}}{\frac{n}{n}} = \lim \dfrac{\frac{2}{n}-\frac{n^2}{n}}{\frac{n}{n}} = \lim \dfrac{0-n}{1} = \lim(-n) = -\infty$;
   - $\lim(-2)^n = \begin{cases} \lim\left(-2^n\right) \ ; \ n \text{ ímpar} \\ \lim 2^n \ ; \ n \text{ par} \end{cases} = \begin{cases} -\infty \ ; \ n \text{ ímpar} \\ +\infty \ ; \ n \text{ par} \end{cases}$;
   - $\lim\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = \begin{cases} \lim\left(-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) \ ; \ n \text{ ímpar} \\ \lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ ; \ n \text{ par} \end{cases} = \begin{cases} 0^- \ ; \ n \text{ ímpar} \\ 0^+ \ ; \ n \text{ par} \end{cases} = 0$;
   - $\lim(2n+3) = 2(+\infty)+3 = +\infty$

   Resposta: **Opção C**

2. De acordo com o enunciado, temos que:

   - $a_{10} - a_4 = 3$
   - $a_4 \times a_{10} = 40$

   Assim, resolvendo o sistema seguinte, usando a definição de progressão aritmética ($a_{10} = a_4 + 6r$), determinamos o valor do primeiro termo (a_1) e da razão (r) da progressão:

$$\begin{cases} a_{10} - a_4 = 3 \\ a_4 \times a_{10} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_4 + 6r - a_4 = 3 \\ a_4 \times (a_4 + 6r) = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6r = 3 \\ {a_4}^2 + a_4 \times 6r = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{3}{6} \\ {a_4}^2 + a_4 \times 6 \times \dfrac{1}{2} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{1}{2} \\ {a_4}^2 + 3\,a_4 - 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{1}{2} \\ a_4 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(40)}}{2(1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{1}{2} \\ a_4 = 5 \ \vee \ a_4 = -8 \end{cases}$$

   Como (a_n) é uma sucessão de termos positivos $a_4 = 5$, pelo que o primeiro termo é:

$$a_1 = a_4 - 3r = 5 - 3 \times \frac{1}{2} = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

   Assim, calculamos a ordem, k, do termo 173, resolvendo a equação:

$$a_1 + (k-1) \times r = 173 \Leftrightarrow \frac{7}{2} + (k-1) \times \frac{1}{2} = 173 \Leftrightarrow \frac{7+k-1}{2} = 173 \Leftrightarrow 6+k = 346 \Leftrightarrow k = 346-6 \Leftrightarrow k = 340$$

3.

3.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f:

$$f'(x) = \left(2x + 3 + \ln\left((1-x)^3\right)\right)' = (2x)' + (3)' + \left(\ln\left((1-x)^3\right)\right)' = 2 + 0 + \frac{\left((1-x)^3\right)'}{(1-x)^3} =$$

$$= 2 + \frac{3(1-x)^2(1-x)'}{(1-x)^3} = 2 - \frac{3\left((1)' - (x)'\right)}{1-x} = 2 + \frac{3(0-1)}{1-x} = 2 - \frac{3}{1-x}$$

Calculando os zeros da derivada da função f, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{1-x} = 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{3}{1-x} \underset{x \neq 1}{\Leftrightarrow} 2(1-x) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2x = 3 \Leftrightarrow -2x = 3 - 2 \Leftrightarrow -2x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Estudando a variação do sinal da derivada no domínio da função e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1
f'	+	0	−	n.d.
f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 1\right[$;
- tem um extremo relativo em $x = -\frac{1}{2}$.

3.2. Como a função g resulta de operações entre funções contínuas, em $]-\infty,1[$ é contínua, pelo que a única reta que pode ser uma assíntota vertical (paralela ao eixo das ordenadas) do gráfico de g é a reta de equação $x=1$.

Calculando $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$, temos:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x+3+\ln\left((1-x)^3\right)}{x-1} = \frac{2(1^-)+3+\ln\left((1-1^-)^3\right)}{1^- - 1} =$$

$$= \frac{2+3+\ln 0^+}{0^-} = \frac{5+(-\infty)}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

Logo a reta de equação $x=1$ é assíntota do gráfico de g, sendo a única paralela ao eixo das ordenadas.

Averiguando se existem assíntotas horizontais (paralelas ao eixo das abcissas) do gráfico de g, temos:

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x+3+\ln\left((1-x)^3\right)}{x-1} = \frac{2(-\infty))+3+\ln\left((1-(-\infty))^3\right)}{-\infty-1} = \frac{-\infty+\infty}{-\infty} \text{(indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x+3+\ln\left((1-x)^3\right)}{x-1} = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x+3}{x-1} + \frac{\ln\left((1-x)^3\right)}{x-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2x+3}{x-1} + \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\left((1-x)^3\right)}{x-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{x} + \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\left((1-x)^3\right)}{x-1} = 2 + \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\left((1-x)^3\right)}{-(1-x)} =$$

(considerando $y = 1-x$, temos que se $x\to -\infty$, então $y\to +\infty$)

$$= 2 + \lim_{y\to +\infty} \frac{\ln\left(y^3\right)}{-y} = 2 + \lim_{y\to +\infty} \frac{3\ln y}{-y} = 2 + \lim_{y\to +\infty} \left(-3 \times \frac{\ln y}{y}\right) = 2 - 3 \times \underbrace{\lim_{y\to +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 - 3\times 0 = 2$$

Assim, como $D_g =]-\infty,1[$, temos que a reta de equação $y=2$ é a única assíntota do gráfico de g paralela ao eixo das abcissas.

3.3. Temos que:

$$g(0) = \frac{f(0)}{0-1} = \frac{2(0)+3+\ln\left((1-0)^3\right)}{-1} = \frac{0+3+\ln(1^3)}{-1} = \frac{3+0}{-1} = -3$$

Assim temos que:

- a função f é contínua em $]-\infty,[$, porque resulta de operações entre funções contínuas neste intervalo, também é em $[-6,-5]$;
- $f(-6) < -3 < f(-5)$;

pelo que podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-6,-5[$ tal que $f(c) = -3$, ou seja, que a equação $f(x) = -3 \Leftrightarrow f(x) = g(0)$, tem, pelo menos, uma solução em $]-6,-5[$, isto é, a equação é possível neste intervalo.

C.A.

$f(-6) = 2(-6)+3+\ln\left((1-(-6))^3\right) \approx -3{,}16$

$f(-5) = 2(-5)+3+\ln\left((1-(-5))^3\right) \approx -1{,}62$

4. Considerando d, a abcissa do ponto D, temos que:

   - $\overrightarrow{DC} = C - D = (0,8) - (d,0) = (-d,8)$;
   - $\overrightarrow{DB} = B - D = (15,8) - (d,0) = (15 - d,8)$;
   - $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = (-d,8) \cdot (15 - d,8) = -d(15 - d) + 8 \times 8 = -15d + d^2 + 64$

   Logo, determinando o valor de d, recorrendo ao produto escalar, vem:

   $$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = 50 \Leftrightarrow d^2 - 15d + 64 = 50 \Leftrightarrow d^2 - 15d + 14 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(1)(14)}}{2(1)} \Leftrightarrow d = 1 \vee d = 14$$

   Como $\overline{OD} < \overline{DA}$, então $d = 1$, pelo que as coordenadas do ponto D, são $(1,0)$.

5. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores da distância percorrida, em quilómetros (as abcissas dos pontos do gráfico), e noutra lista os valores da energia gasta, em quilocalorias (os ordenadas dos pontos), e calculando as medidas estatísticas referentes às duas listas, obtemos os valores da média das distâncias percorridas ($\overline{x}_d$), e da mediana das quilocalorias gastas ($\tilde{x}_e$):

   $$\overline{x}_d \approx 7{,}5 \text{ e } \tilde{x}_e = 515;$$

   Com os dados das duas listas, podemos calcular o valor do coeficiente de correlação linear, cujo arredondamento às centésimas, é $r \approx 0{,}99$, o que significa que a correlação entre as duas variáveis é positiva forte.

   Usando a regressão linear anterior, representando a reta de regressão e usando-a para obter uma estimativa da energia gasta num treino em que se percorra 6 quilómetros, ou seja calculando a ordenada do ponto da reta que tem abcissa 6, obtemos o valor 411 quilocalorias.

   Logo, as correspondências corretas são:

   - **I $\rightarrow$ a)**
   - **II $\rightarrow$ b)**
   - **III $\rightarrow$ c)**
   - **IV $\rightarrow$ b)**

6.

   6.1. Sobre um ponto da reta CD sabemos que:

   - pertence ao plano que contém a base $[ABCD]$, e este é definido pela equação $x = 3$, então, como qualquer ponto desta reta, tem abcissa 3;
   - pertence ao plano CDE, pelo que verifica a equação $5y + 2z - 62 = 0$.

   Assim, de entre as opções apresentadas, a única que representa um ponto que verifica cumulativamente as duas condições é $(3,4,21)$, porque a abcissa é 3 e $5(4) + 2(21) - 62 = 0$.

   Resposta: **Opção A**

6.2. Como a reta EF é perpendicular ao plano CDE o vetor normal do plano, $\vec{v}(0,5,2)$, também é um vetor diretor da reta, e uma equação da reta EF é:

$$(x,y,z) = (-9,0,2) + k(0,5,2), \, k \in \mathbb{R}$$

E assim, um ponto genérico desta reta, tem coordenadas: $(-9,5k,2+2k), \, k \in \mathbb{R}$

Como o ponto E é a interseção da reta EF com o plano CDE, substituindo as coordenadas do ponto genérico da reta EF na equação do plano CDE, obtemos o valor de k, correspondente ao ponto E:

$$5(5k) + 2(2+2k) - 62 = 0 \;\Leftrightarrow\; 25k + 4 + 4k - 62 = 0 \;\Leftrightarrow\; 29k = 62 - 4 \;\Leftrightarrow\; k = \frac{58}{29} \;\Leftrightarrow\; k = 2$$

Desta forma, temos que as coordenadas do ponto E são $\big(-9,5(2),2+2(2)\big) = (-9,10,6)$, e o comprimento da aresta da base é:

$$\overline{EF} = \sqrt{(-9-(-9))^2 + (10-0)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{0+100+16} = \sqrt{116}$$

Como os planos que contêm as bases do prima são paralelas. Como a base $[ABCD]$ está contida no plano de equação $x = 3$ e o ponto F tem abcissa -9, então a base $[EFGH]$ está contida no plano de equação $x = -9$, pelo que a altura do prima é:

$$\overline{AF} = 3 - (-9) = 12$$

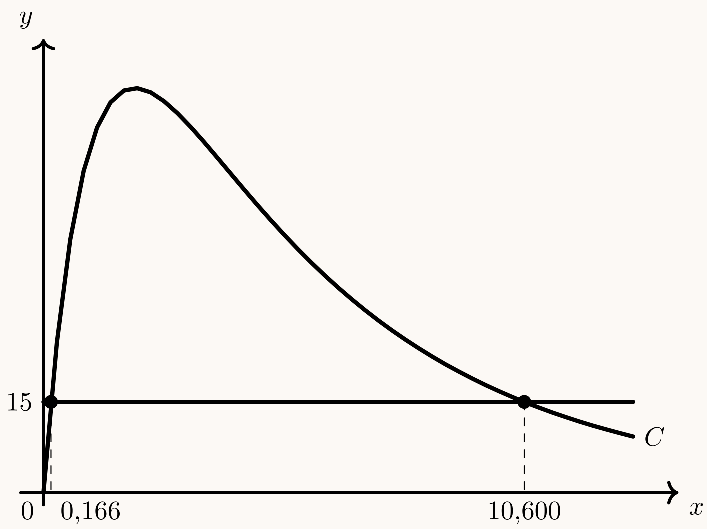
E assim temos que o volume do prisma é:

$$V = \overline{EF}^2 \times \overline{AF} = \sqrt{116}^2 \times 12 = 1392$$

7. Como a concentração de paracetamol tem de ser superior a 15 miligramas por litro de sangue para produzir efeito terapêutico significativo, a duração do efeito é a amplitude do intervalo que é solução da condição

$$C(t) > 15$$

Assim, inserimos na calculadora gráfica a expressão da função C, e função cujo gráfico é a reta horizontal de equaação $y = 15$ e visualizamos os gráficos das funções reproduzidos na figura ao lado. Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às milésimas) das abcissas dos pontos de interseção das duas funções, a que correspondem os instantes em que a concentração aumenta para valores superiores a 15 mg/l ($t_1 \approx 0,166$) e depois em que baixa deste valor ($t_2 \approx 10,600$) .



Assim, concluímos que o medicamento é eficaz no intervalo de tempo $]0,166 \,; \, 10,600[$, ou seja, durante:

$$10,600 - 0,166 = 10,434 \text{ horas}$$

Como 0,434 horas correspondem a $60 \times 0,434 \approx 26$ minutos, concluímos que o paracetamol produz efeito terapêutico significativo durante 10 horas e 26 minutos.

8.

8.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um um aluno presente na assembleia, e os acontecimentos:
D:≪Ser do 12.º ano≫
A:≪Frequentar a disciplina de Matemática A≫

Temos que

$P\left(\overline{D}\cup\overline{A}\right)=\frac{9}{11}\Leftrightarrow P\left(\overline{D\cap A}\right)=\frac{9}{11}\Leftrightarrow 1-P\left(D\cap A\right)=\frac{9}{11}\Leftrightarrow -P\left(D\cap A\right)=\frac{9}{11}-1\Leftrightarrow P\left(D\cap A\right)=\frac{2}{11}$

Designado por a o número de o número de alunos presentes na assembleia, sabemos que

$$P(D\cap A)=\frac{10}{a}$$

Logo determinando o valor de a, temos:

$$\frac{2}{11}=\frac{10}{a}\ \Leftrightarrow\ a=\frac{10\times 11}{2}\ \Leftrightarrow\ a=55$$

8.2. Como existem 25 alunos do 12.º ano na assembleia e se pretende escolher ao acaso, um conjunto de 3,o número de conjuntos diferentes que é possível escolher (sem considerar a ordem relevante), é ${}^{25}C_3$.

Como se pretende que destes 25 alunos, pelo menos um frequente a disciplina de Matemática A, o número de conjuntos de 3 alunos que verifica esta condição pode ser determinado pela diferença entre o números total de conjuntos de 3 alunos do 12.º ano e o número de conjuntos formado unicamente por alunos que não frequentam a disciplina ($25-10=15$ alunos). Ou seja, ${}^{25}C_3-{}^{15}C_3$.

Assim, a probabilidade de selecionar um grupo de 3 alunos do 12.º ano, em que pelo menos um frequenta a disciplina de Matemática A, é:

$$\frac{{}^{25}C_3-{}^{15}C_3}{{}^{25}C_3}=\frac{369}{460}$$

Resposta: **Opção C**

9. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar ao acaso, um dos alunos do 11.º ano desta escola, e os acontecimentos:
F:≪O aluno frequenta a disciplina de Filosofia≫
E:≪O aluno frequenta a disciplina de Economia A≫

Sabemos que:

- $P\left(F\right)=2P(E)\ \Leftrightarrow\ P(E)=\frac{1}{2}P(F)$;
- $P\left(F\cup E\right)=3P\left(F\cap E\right)$.

Assim:

- $P(F\cup E)=P(F)+P(E)-P(F\cap E)\ \Leftrightarrow\ 3P(F\cap E)=P(F)+\frac{1}{2}P(F)-P(F\cap E)\ \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow\ 3P(F\cap E)+P(F\cap E)=\frac{2}{2}P(F)+\frac{1}{2}P(F)\ \Leftrightarrow\ 4P(F\cap E)=\frac{3}{2}P(F)\ \Leftrightarrow\ P(F\cap E)=\frac{3}{8}P(F)$
- $P\left(\overline{E}\cap F\right)=P(F)-P(F\cap E)=P(F)-\frac{3}{8}P(F)=\frac{8}{8}P(F)-\frac{3}{8}P(F)=\frac{5}{8}P(F)$

Logo, a probabilidade do aluno escolhido ao não frequentar a disciplina de Economia A, sabendo-se que frequenta a disciplina de Filosofia, é:

$$P\left(\overline{E}|A\right)=\frac{P\left(\overline{E}\cap F\right)}{P(F)}=\frac{\frac{5}{8}P(F)}{P(F)}=\frac{5}{8}$$

10. As coordenadas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções f e g são as soluções da equação $f(x) = g(x)$. Assim resolvendo a equação temos:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen} x \cos^2 x \underset{\operatorname{sen} x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{sen} x} = \cos^2 x \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $x \in]0,\pi[$, a equação $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ é impossível, pelo que as soluções da equação são:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in]0,\pi[$, a equação tem duas soluções (para $k = 0$), nomeadamente $x_1 = \frac{\pi}{4}$ e $x_2 = \frac{3\pi}{4}$, pelo que as ordenadas dos pontos de interseção dos gráficos são:

- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}^3\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$;
- $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}^3\frac{3\pi}{4} = \operatorname{sen}^3\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Logo as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g são $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

11. Temos que:

- Como $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{4}$ e $f''(x)$ tem exatamente dois zeros, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$		3	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\frown$	Pt. I.	$\smile$		$\smile$

  Desta forma como em $x = 3$ não existe variação do sinal de f'', então não existe um ponto de inflexão no gráfico de f com abcissa 3, pelo que a afirmação **I.** é falsa.

- Como no intervalo $\left]-\infty,\frac{3}{4}\right]$, $f''(x) < 0$, então a função f' é decrescente neste intervalo. Assim como $-2 < -1$, $f'(-2) > f'(-1)$, ou seja o declive da reta r é maior que o declive da reta s, pelo que a afirmação **II.** é falsa.

12.

12.1. Como $i^{23} = i^{4\times5+3} = i^3 = -i$, e considerando $|w| = \rho$, temos que:

$$\frac{i^{23}\times w^2}{\overline{w}} = \frac{-i\times w^2\times w}{\overline{w}\times w} = \frac{-i\times w^3}{\overline{w}\times w} = \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}}\times\left(\rho e^{i\theta}\right)^3}{\rho e^{i(-\theta)}\times\rho e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}}\times\rho^3 e^{i3\theta}}{\rho^2 e^{i(-\theta)+\theta}} = \frac{\rho^3 e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+3\theta\right)}}{\rho^2 e^{i\times0}} = \rho e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+3\theta\right)}$$

Ou seja, $\operatorname{Arg}\left(\frac{i^{23}\times w^2}{\overline{w}}\right) = 3\theta + \frac{3\pi}{2}$.

Resposta: **Opção D**

12.2. Escrevendo $1-i$ na forma trigonométrica ($\rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = |z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4.º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Assim $1-i = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Resolvendo a equação, vem:

$$(1-i)z^3 - 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)z^3 - 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)z^3 = 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^3 = \frac{8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} \Leftrightarrow z^3 = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8e^{i\frac{\pi}{2}}} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}} \Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}, k \in \{0,1,2\}$$

Assim, os três números complexos que são solução da equação, são:

- $(k=0) \rightarrow 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$
- $(k=1) \rightarrow 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$
- $(k=2) \rightarrow 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}} = 2e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Como w é uma das soluções da equação e $\operatorname{Arg} w \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, então $w = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Escrevendo w na forma $a+bi$, com $a,b \in \mathbb{R}$, temos:

$$w = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}+i$$

13. Para estudar a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico, começamos por estudar o sinal de g'':

- $g'(x) = \left([f(x)]^2\right)' = 2\times f(x)\times f'(x)$
- $g''(x) = \left(g'(x)\right)' = \left(2\times f(x)\times f'(x)\right)' = 2\left(f(x)\times f'(x)\right)' = 2\left(f'(x)\times f'(x) + f(x)\times(f'(x))'\right) =$
  $= 2\left((f'(x))^2 + f(x)f''(x)\right)$

Assim, temos que:

- $2 > 0$
- $(f'(x))^2 > 0$ para $x \in \mathbb{R}$ porque $f'(x)$ é um número real e não se anula;
- $f(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$ porque f é positiva;
- $f''(x) \geq 0$ para $x \in \mathbb{R}$ porque o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

Logo podemos concluir que $g''(x) > 0$, para $x \in \mathbb{R}$ (porque g'' resulta de somas e produtos de funções positivas ou não negativas), ou seja, o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima.